Sommario

Utilizziamo una tecnica di analisi reale per dimostrare la regolarità C^∞ delle soluzioni classiche di un'equazione alle derivate parziali non lineare e parabolico-degenere, con dato iniziale $C^{2,\alpha}$. Questo problema interviene nello studio delle proprietà geometriche del moto per curvatura di Levi di una ipersuperficie reale in $\mathbb{C}^2$, localmente grafico di una funzione di classe $C^{2,\alpha}$ e con curvatura di Levi diversa da zero in ogni punto.

Abstract

We prove, with a real analysis technique, the smooth regularity of classical solutions to a nonlinear degenerate parabolic PDE with initial data $C^{2,\alpha}$. This equation arises in the study of the geometric properties of the motion by the trace of the Levi form of a real hypersurface in $\mathbb{C}^2$ with Levi curvature different from zero at every point and which is locally the graph of a $C^{2,\alpha}$ function.

1 Introduzione

In questo seminario presentiamo un risultato di regolarità per le soluzioni dell'equazione del moto per curvatura di Levi di una ipersuperficie reale M_0 in $\mathbb{C}^2$. Se M_0 è regolare ci aspettiamo che la sua evoluzione sia descritta da una funzione regolare $\rho = \rho(z,t)$, cioè $M_t = \{z \in \mathbb{C}^2 : \rho(z,t) = 0\}$. In questa situazione diciamo che $\{M_t\}_{t\geq 0}$ è l'evoluzione di M_0 per *curvatura di Levi* se, per ogni t positivo, la traiettoria $z = z(t)$ con punto iniziale $p \in M_0$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = k(z,t)\nu(z,t), & t > 0 \\ z(0) = p \end{cases} \tag{1}$$

dove $\nu = \nu(z,t)$ è la normale unitaria interna a M_t e

$$k = |\partial\rho|^{-3}(\rho_{z_1\bar{z}_1}\rho_{z_2}\rho_{\bar{z}_2} - \rho_{z_1\bar{z}_2}\rho_{z_2}\rho_{\bar{z}_1} - \rho_{z_2\bar{z}_1}\rho_{z_1}\rho_{\bar{z}_2} + \rho_{z_2\bar{z}_2}\rho_{z_1}\rho_{\bar{z}_1})$$

è la curvatura di Levi dell'ipersuperficie $\rho = 0$ e $|\partial\rho|^2 = |\rho_{z_1}|^2 + |\rho_{z_2}|^2$.

Si tratta di un problema molto interessante dal punto di vista dell'analisi complessa in quanto le soluzioni dell'equazione di evoluzione contengono delle informazioni sugli inviluppi di olomorfia dei sottoinsiemi di $\mathbb{C}^2$ (si veda [ST2], [ST3]).

Se ad esempio M_0 è una sfera di raggio $r(0)$ in $\mathbb{C}^2$, allora M_t è una famiglia di sfere concentriche di raggio

$$r(t) = \sqrt{r^2(0) - t}$$

che si contraggono verso il centro della sfera in maniera C^∞ ed in tempo finito. È naturale aspettarsi che questo comportamento sia tipico dell'evoluzione di una ipersuperficie con curvatura di Levi strettamente positiva, come avviene ad esempio per il moto per curvatura media classica (si veda ad esempio [H]). Ma la differenza cruciale tra il problema parabolico che governa l'evoluzione per curvatura di Levi e l'evoluzione per curvatura media classica è che, anche se localmente M_0 è il grafico di una funzione C^∞, (1) è un problema parabolico "degenere".

I primi a studiare questo problema sono stati Slodkowski e Tomassini, che in [ST1] dimostrano l'esistenza di una soluzione viscosa per il problema (1) con dato iniziale continuo. Ma la soluzione che essi trovano è solo continua.

In un recente lavoro [HK] Huisken e Klingenberg hanno provato che, se M_0 è C^∞ e compatta senza bordo, allora esiste un intervallo temporale $[0, t_0)$, $t_0 > 0$, tale che M_0 ha un'evoluzione $\{M_t\}_{0\leq t<t_0}$ di classe C^∞. La regolarità della loro soluzione dipende però pesantemente dalla regolarità del dato iniziale in quanto dalla loro prova risulta evidente che, per dato iniziale in $C^{2,\alpha}$, esiste una soluzione in $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Inoltre in [HK] è sottolineato esplicitamente che un'ulteriore regolarità di questa soluzione, ad esempio per dato iniziale con curvatura di Levi strettamente positiva, è un problema aperto. In questo seminario diamo una prima risposta positiva a questa domanda.

Poiché $z(t) \in M_t$ per ogni $t > 0$, derivando rispetto a t l'identità $\rho(z(t),t) = 0$, deduciamo che

$$\partial\rho \cdot \dot{z} + \partial_t\rho = 0.$$

Se $\partial\rho \neq 0$, allora ρ è una soluzione dell'equazione parabolica (cfr. [ST1])

$$\rho_t = |\partial\rho|^{-2}(\rho_{z_1\bar{z}_1}\rho_{z_2}\rho_{\bar{z}_2} - \rho_{z_1\bar{z}_2}\rho_{z_2}\rho_{\bar{z}_1} - \rho_{z_2\bar{z}_1}\rho_{z_1}\rho_{\bar{z}_2} + \rho_{z_2\bar{z}_2}\rho_{z_1}\rho_{\bar{z}_1}).$$

Se introduciamo le coordinate complesse $z_1 = (x_1, x_2)$, $z_2 = (x_3, v)$ e per ogni t scriviamo localmente l'ipersuperficie M_t come il grafico di una funzione u di classe C^2

$$M_t := \{v - u(x_1, x_2, x_3, t) = 0\},$$

allora la curvatura di Levi di M_t si scrive in termini di u come

$$k(x_1, x_2, x_3, t, u(x_1, x_2, x_3, t)) = -\frac{(1 + u_{x_3}^2)\mathcal{L}u}{2(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{2}$$

dove $\mathcal{L}$ è l'operatore differenziale del secondo ordine

$$\mathcal{L} := \partial_{x_1x_1} + \partial_{x_2x_2} + 2a\partial_{x_1x_3} + 2b\partial_{x_2x_3} + (a^2 + b^2)\partial_{x_3x_3}, \tag{3}$$

i cui coefficienti sono funzioni C^∞ delle derivate parziali prime di u rispetto alle variabili x_1, x_2, x_3

$$a = a(\nabla u) = \frac{u_{x_2} - u_{x_1}u_{x_3}}{1 + u_{x_3}^2}, \quad b = b(\nabla u) = -\frac{u_{x_1} + u_{x_2}u_{x_3}}{1 + u_{x_3}^2}. \tag{4}$$

Qui abbiamo indicato con ∇u il gradiente di u rispetto a (x_1, x_2, x_3) e con $u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}$ le derivate parziali di u rispetto a x_1, x_2, x_3 rispettivamente.

Se supponiamo che localmente M_0 sia il grafico di una funzione $u_0 : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ di classe $C^{2,\alpha}$ e che la sua curvatura di Levi k sia diversa da zero in ogni punto di un insieme aperto $\mathcal{O}$ di $\mathbb{R}^3$, allora per i risultati in ([HK], [ST3]) esiste $T > 0$ tale che anche $\{M_t\}_{0<t<T}$ è il grafico di una funzione $u : \mathcal{O} \times [0, T) \to \mathbb{R}$ di classe $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}$. Qui abbiamo indicato con $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}$ l'insieme di tutte le funzioni continue con derivate u_x, u_{xx}, u_t hölderiane in x di esponente α e hölderiane in t di esponente $\alpha/2$. Poiché il nostro problema è di natura locale, non è restrittivo assumere $T > 0$ tale che $k(\xi, u(\xi)) \neq 0$ per ogni $\xi \in \mathcal{O} \times [0, T)$. Il nostro principale risultato è il seguente

Teorema 1.1 *Sia $u_0 \in C^{2,\alpha}(\mathcal{O})$ e sia $\Omega = \mathcal{O} \times (0, T)$. Se $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mathcal{O} \times [0, T))$ è una soluzione classica del problema parabolico*

$$\begin{cases} \partial_t u = \frac{(1+u_{x_3}^2)}{4(1+|\nabla u|^2)}\mathcal{L}u, \text{ in } \Omega \\ u(x, 0) = u_0(x), \ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{O}, \end{cases} \tag{5}$$

allora $u \in C^\infty(\Omega)$.

Questo risultato mostra che la regolarità C^∞ dell'evoluzione non dipende dalla regolarità del dato iniziale ma dall'equazione parabolica in (5).

Dalla nostra prova risulta evidente che il nostro risultato si può estendere all'equazione del moto per curvatura media di Levi di una ipersuperficie reale

in $\mathbb{C}^n$; in questo caso l'operatore $\mathcal{L}u$ in (5) è la traccia della forma di Levi (cfr. [CM]).

Osserviamo esplicitamente che l'operatore definito in (3) è un operatore quasilineare ellittico degenere la cui forma caratteristica ha minimo autovalore identicamente nullo in ogni punto. Pertanto l'equazione in (5) è un'equazione parabolica "degenere". Per studiare le proprietà di regolarità delle soluzioni utilizziamo una tecnica di analisi reale che è stata introdotta per la prima volta in [C] per studiare il problema stazionario. Questa tecnica è stata raffinata in [CM], dove si dimostra la regolarità C^∞ di una ipersuperficie reale in $\mathbb{C}^n$ con assegnata curvatura media di Levi. Lo stesso metodo è stato successivamente utilizzato in [CPP] per studiare un'equazione ultraparabolica, con un termine nonlineare del primo ordine, che interviene in finanza matematica.

Per presentare questa tecnica introduciamo ora alcune notazioni. Sia $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega)$ una soluzione del problema parabolico (5) e siano a e b i coefficienti definiti in (4) in termini di ∇u. Se definiamo i campi vettoriali

$$X_1 = \partial_{x_1} + a\partial_{x_3}, \quad X_2 = \partial_{x_2} + b\partial_{x_3}, \tag{6}$$

allora riconosciamo che (si veda ad esempio [C])

$$\mathcal{L}u = X_1^2 u + X_2^2 u - (X_1 a + X_2 b)\partial_{x_3} u, \tag{7}$$

e possiamo scrivere il commutatore di X_1 e X_2 come:

$$[X_1, X_2] = -\frac{\mathcal{L}u}{1+u_{x_3}^2}\partial_{x_3}. \tag{8}$$

Inoltre, osservando che

$$1 + |\nabla u|^2 = (1 + a^2 + b^2)(1 + u_{x_3}^2) \tag{9}$$

possiamo scrivere l'equazione parabolica in (5) come:

$$\partial_t u = \frac{1}{4(1+a^2+b^2)}(X_1^2 u + X_2^2 u - (X_1 a + X_2 b)\partial_{x_3} u). \tag{10}$$

Se i coefficienti a, b dei campi vettoriali X_1, X_2 fossero C^∞, allora l'operatore

$$X_1^2 + X_2^2 - (X_1 a + X_2 b)\partial_{x_3} - 4(1 + a^2 + b^2)\partial_t \tag{11}$$

sarebbe ipoellittico, in quanto sarebbe soddisfatta la condizione di Hörmander.

Infatti, per (8) e (2)

$$[X_1, X_2] = -\frac{\mathcal{L}u}{1+u_{x_3}^2}\partial_{x_3} = \frac{2(1+|\nabla u|^2)^{3/2}}{(1+u_{x_3}^2)^2}k(\xi, u(\xi))\partial_{x_3} \tag{12}$$

con $k(\xi, u(\xi)) \neq 0$ per ogni $\xi \in \mathcal{O} \times [0, T)$, dunque i campi vettoriali

$$X_1, X_2, [X_1, X_2], 4(1 + a^2 + b^2)\partial_t$$

sono linearmente indipendenti in ogni punto $\xi \in \mathcal{O} \times [0,T)$.

Nella nostra situazione i coefficienti a e b sono solo $C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Omega)$ in quanto sono funzioni C^∞ del gradiente di una soluzione $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega)$.

In questo seminario indichiamo solo una traccia della prova del Teorema 1.1 e rimandiamo al lavoro [M] per le dimostrazioni dettagliate dei risultati qui contenuti.

Nella Sezione 2 introduciamo un operatore lineare H di *passo due*, associato in maniera naturale all'equazione non lineare in (5), con coefficienti $C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}$. Utilizzando poi un metodo di congelamento, definiamo un operatore ipoellittico H_{ξ_0}, il cui prototipo è l'operatore del calore sul gruppo di Heisenberg. Per questo operatore sono note delle stime della soluzione fondamentale Γ_{ξ_0} e delle sue derivate in termini della distanza di controllo (si veda ad esempio [NSW], [SC], [RS]). Nella Proposizione 2.1 enunciamo una stima precisa della dipendenza di Γ_{ξ_0} e delle sue derivate dal punto congelato ξ_0. Scriviamo poi una formula di rappresentazione per le soluzioni v dell'equazione lineare $Hv = f$ in termini di Γ_{ξ_0}. Nella Sezione 3 deriviamo formalmente l'equazione $Hv = f$ rispetto ai campi vettoriali X_1, X_2 definiti in (6) e rispetto a

$$X_3 = (X_1 a + X_2 b)\partial_{x_3}, \quad T = (1 + a^2 + b^2)\partial_t. \tag{13}$$

Quindi introduciamo delle classi di funzioni hölderiane $C_H^{m,\alpha}$ definite in termini dei campi vettoriali (6) e (13) per costruire una teoria lineare "ad hoc" per l'operatore H:

Proposizione 1.1 *Per ogni $m \geq 2$ se $a, b \in C_{H,loc}^{m,\alpha}(\Omega)$ e $v \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega)$ è una soluzione di*

$$Hv = f \in C_{H,loc}^{m-1,\alpha}(\Omega),$$

allora $v \in C_{H,loc}^{m+1,\beta}(\Omega)$, per ogni $\beta < \alpha$.

Nella Sezione 4 applichiamo la Proposizione 1.1 all'equazione non lineare in (5) e dimostriamo il Teorema 1.1.

2 L'operatore congelato

In questa sezione fissiamo una soluzione $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega)$ di (5) e denotiamo con a e b i coefficienti definiti in (4) in termini di u. Consideriamo allora l'operatore lineare parabolico

$$H = L - 4T \tag{14}$$

con

$$L = X_1^2 + X_2^2 - X_3,$$

e X_1, X_2, X_3, T definiti in (6) e (13).

Per studiare le proprietà di regolarità delle soluzioni dell'equazione lineare $Hv = f$ definiamo, per ogni $\xi_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, t^0) \in \Omega$, un operatore congelato associato a H come segue:

$$H_{\xi_0} = L_{\xi_0} - 4T_{\xi_0}, \tag{15}$$

dove

$$L_{\xi_0} = X_{1,\xi_0}^2 + X_{2,\xi_0}^2 - X_{3,\xi_0},$$
$$X_{1,\xi_0} = \partial_{x_1} + (P_{\xi_0}a)\partial_{x_3}, \quad X_{2,\xi_0} = \partial_{x_2} + (P_{\xi_0}b)\partial_{x_3},$$
$$X_{3,\xi_0} = (X_1 a + X_2 b)(\xi_0)\partial_{x_3}, \quad T_{\xi_0} = (1 + a^2 + b^2)(\xi_0)\partial_{x_3}.$$

Qui, per una funzione differenziabile f, abbiamo indicato con $P_{\xi_0}f$ il seguente polinomio del primo ordine

$$(P_{\xi_0}f)(\xi) = f(\xi_0) + (X_1 f)(\xi_0)(x_1 - x_1^0) + (X_2 f)(\xi_0)(x_2 - x_2^0),$$

dove $\xi = (x_1, x_2, x_3, t)$.

Dimostreremo che, a meno di un cambiamento di variabile, H_{ξ_0} è l'operatore del calore sul gruppo di Heisenberg, per il quale ricordiamo ora alcune proprietà. Chiamiamo $\mathcal{H}^3$ il gruppo definito da $\mathbb{R}^3$ e dalla legge di composizione:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (x_1 + x_1^0, x_2 + x_2^0, x_3 + x_3^0 + 2(x_1 x_2^0 - x_2 x_1^0)).$$

Se

$$X_{\mathcal{H}} = \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad e \quad Y_{\mathcal{H}} = \frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

il Laplaciano di Kohn (o laplaciano subellittico) è

$$\Delta_{\mathcal{H}} = X_{\mathcal{H}}^2 + Y_{\mathcal{H}}^2.$$

Definiamo ora l'operatore del calore sul gruppo di Heisenberg come

$$H_{\mathcal{H}} = X_{\mathcal{H}}^2 + Y_{\mathcal{H}}^2 - \partial_t.$$

$\mathcal{H}^3 \times \mathbb{R}$ è un gruppo rispetto alla legge di composizione

$$\xi_0 \circ \xi = (x_1 + x_1^0, x_2 + x_2^0, x_3 + x_3^0 + 2(x_1 x_2^0 - x_2 x_1^0), t + t_0),$$

e l'operatore $H_{\mathcal{H}}$ è invariante rispetto alle traslazioni a sinistra

$$\xi_0^{-1} \circ \xi = (x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0 - 2(x_1 x_2^0 - x_2 x_1^0), t - t_0).$$

Inoltre, se $\delta_\lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è il gruppo delle dilatazioni

$$\delta_\lambda(x_1, x_2, x_3, t) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda^2 x_3, \lambda^2 t), \quad \lambda > 0,$$

$H_{\mathcal{H}}$ è omogeneo di grado 2 rispetto a δ_λ.

In $\mathcal{H}^3 \times \mathbb{R}$ è definita una distanza naturale:

$$d_{\mathcal{H}}(\xi, \xi_0) = \eta(\xi_0^{-1} \circ \xi),$$

dove
$$\eta(\xi) = ((x_1^2 + x_2^2)^2 + x_3^2 + t^2)^{1/4}, \tag{16}$$
e la misura delle palle in questa metrica è
$$|B_{\mathcal{H}}(\xi_0, r)| = C_0 r^N$$
dove $N = 6$. Chiameremo questo numero N la dimensione omogenea di $\mathcal{H}^3 \times \mathbb{R}$. La soluzione fondamentale $\Gamma_{\mathcal{H}}$ di $H_{\mathcal{H}}$ ha la seguente stima in termini di $d_{\mathcal{H}}$ e N (si veda [NSW] p. 114, [SC], [RS]):
$$|\Gamma_{\mathcal{H}}(\xi_0^{-1} \circ \xi, 0)| = |\Gamma_{\mathcal{H}}(\xi, \xi_0)| \leq c d_{\mathcal{H}}^{-N+2}(\xi, \xi_0),$$
$$|X_{\mathcal{H}} \Gamma_{\mathcal{H}}(\xi, \xi_0)| \leq c d_{\mathcal{H}}^{-N+1}(\xi, \xi_0), \quad |Y_{\mathcal{H}} \Gamma_{\mathcal{H}}(\xi, \xi_0)| \leq c d_{\mathcal{H}}^{-N+1}(\xi, \xi_0)$$
$$|\partial_{x_3} \Gamma_{\mathcal{H}}(\xi, \xi_0)| \leq c d_{\mathcal{H}}^{-N}(\xi, \xi_0), \quad |\partial_t \Gamma_{\mathcal{H}}(\xi, \xi_0)| \leq c d_{\mathcal{H}}^{-N}(\xi, \xi_0).$$
Le precedenti stime valgono uniformemente per ξ, ξ_0 sui compatti di $\Omega \times \Omega$. Quindi, nella geometria naturale del problema, $X_{\mathcal{H}}, Y_{\mathcal{H}}$ sono derivate prime, $-4\partial_{x_3} = [X_{\mathcal{H}}, Y_{\mathcal{H}}]$ è una derivata seconda nella direzione dei campi vettoriali e ∂_t ha il peso di una derivata seconda.

Ricordiamo alcune proprietà dei coefficienti a, b definiti in (4).

Osservazione 2.1 *Con le precedenti notazioni*
$$a = X_2 u, \quad b = -X_1 u.$$
Inoltre, se $u \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\Omega)$ è una soluzione di (5) allora
$$(X_2 a - X_1 b)(\xi) = -2k(\xi, u(\xi)) \frac{(1 + a^2 + b^2)^{3/2}(\xi)}{(1 + u_{x_3}^2)^{1/2}(\xi)} = 4(1 + |\nabla u|^2)(\xi) \partial_t u(\xi),$$
$$(X_1 a + X_2 b)(\xi) = ([X_1, X_2] u)(\xi) = (X_1 b - X_2 a)(\xi)(\partial_{x_3} u)(\xi).$$
Per ogni $\xi \in \Omega$ il cambiamento di variabile
$$\phi_{\xi_0}(\xi) = \left(x_1, x_2, \frac{\varphi_{\xi_0}(\xi)}{(X_2 a - X_1 b)(\xi_0)}, \frac{t}{4(1 + a^2 + b^2)(\xi_0)} \right) \tag{17}$$
dove
$$\varphi_{\xi_0}(\xi) = 2\Big(2x_3 - X_1 a(\xi_0) x_1^2 - X_2 b(\xi_0) x_2^2 - (X_2 a(\xi_0) + X_1 b(\xi_0)) x_1 x_2\Big)$$
$$-4\Big(a(\xi_0) - X_1 a(\xi_0) x_1^0 - X_2 a(\xi_0) x_2^0\Big) x_1$$
$$-4\Big(b(\xi_0) - X_1 b(\xi_0) x_1^0 - X_2 b(\xi_0) x_2^0\Big) x_2 - \frac{(X_1 a + X_2 b)(\xi_0)}{(1 + a^2 + b^2)(\xi_0)} t,$$
trasforma H_{ξ_0} (definito in (15)) nell'operatore del calore sul gruppo di Heisenberg. Infatti, per ogni $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, se
$$u_{\mathcal{H}} = u \circ \phi_{\xi_0}^{-1},$$

allora

$$X_{1,\xi_0}u(\xi) = X_{\mathcal{H}}u_{\mathcal{H}}(\phi_{\xi_0}(\xi)) \quad X_{2,\xi_0}u(\xi) = Y_{\mathcal{H}}u_{\mathcal{H}}(\phi_{\xi_0}(\xi)),$$
$$(X_{3,\xi_0} + 4T_{\xi_0})u(\xi) = \partial_t u_{\mathcal{H}}(\phi_{\xi_0}(\xi)).$$

Inoltre

$$H_{\xi_0}u(\xi) = H_{\mathcal{H}}u_{\mathcal{H}}(\phi_{\xi_0}(\xi))$$

e la soluzione fondamentale di H_{ξ_0} è

$$\Gamma_{\xi_0}(\cdot,\cdot) = c(\xi_0)\Gamma_{\mathcal{H}}(\phi_{\xi_0}(\cdot), \phi_{\xi_0}(\cdot)),$$

con

$$\frac{1}{c(\xi_0)} = (1 + a^2 + b^2)(\xi_0)(X_2a - X_1b)(\xi_0).$$

Le stime di Γ_{ξ_0} e delle sue derivate si possono allora scrivere in termini della distanza naturale:

$$d_{\xi_0}(\xi,\zeta) = d_{\mathcal{H}}(\phi_{\xi_0}(\xi), \phi_{\xi_0}(\zeta)) = \eta((\phi_{\xi_0}(\zeta))^{-1} \circ \phi_{\xi_0}(\xi)). \qquad (18)$$

In particolare

$$d_\xi(\xi,\zeta) = \eta(e_1, e_2, e_3, e_4),$$

dove

$$e_1(\xi,\zeta) = x_1 - z_1, \quad e_2(\xi,\zeta) = x_2 - z_2,$$
$$e_3(\xi,\zeta) = c_1(\xi)\Big(x_3 - z_3 - a(\xi)(x_1 - z_1) - b(\xi)(x_2 - z_2)$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{2} c_{ij}(\xi)(x_i - z_i)(x_j - z_j) - c_2(\xi)(t - \tau)\Big),$$
$$e_4(\xi,\zeta) = c_3(\xi)(t - \tau),$$

e dove $\zeta = (z_1, z_2, z_3, \tau)$, $\xi = (x_1, x_2, x_3, t)$, $c_1, c_2 \in C^{\alpha,\alpha/2}(\Omega)$, $c_3 \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Omega)$, $c_1, c_3 > 0$ in Ω, e $c_{ij} \in C^{\alpha,\alpha/2}(\Omega)$ per ogni $i,j = 1,2$. Precisamente

$$c_1(\xi) = \frac{4}{(X_2a - X_1b)(\xi)}, \quad c_2(\xi) = \frac{(X_1a + X_2b)(\xi)}{4(1 + a^2 + b^2)(\xi)} \quad c_3(\xi) = \frac{1}{4(1 + a^2 + b^2)(\xi)}.$$

In seguito utilizzeremo la seguente notazione. Chiamiamo

$$X_{4,\xi_0} = T_{\xi_0}.$$

Per ogni multi-indice $I = (i_1, \dots, i_m)$, $i_k \in \{1,2,3,4\}$ definiamo la lunghezza di I come

$$|I| = |i_1| + \ldots + |i_m|,$$

dove

$$|i_k| = \begin{cases} 1, & i_k = 1,2, \\ 2, & i_k = 3,4, \end{cases}$$

e scriviamo

$$X^I_{\xi_0} = X_{i_1,\xi_0} \cdots X_{i_m,\xi_0}.$$

Fissate due costanti positive M_0, M, stimiamo la dipendenza di Γ_{ξ_0} dal punto congelato ξ_0 sull'insieme

$$S := \{\zeta \in \Omega : M_0 d_\xi(\xi, \xi_0) < d_\xi(\xi, \zeta) < M\}.$$

Proposizione 2.1 *Per ogni multi-indice I esiste una costante positiva c tale che*

$$|X^I_\xi \Gamma_\xi(\xi,\zeta) - X^I_{\xi_0}\Gamma_{\xi_0}(\xi_0,\zeta)| \le c d_\xi^{-N+2+\alpha-|I|}(\xi,\zeta)|\xi-\xi_0|$$

$$c d_\xi^{-N+1-|I|}(\xi,\zeta)(|x_1 - x_1^0| + |x_2 - x_2^0|) + c d_\xi^{-N-|I|}|e_4(\xi,\zeta) - e_4(\xi_0,\zeta)|$$

$$+c d_\xi^{-N-|I|}(\xi,\zeta)\Big|e_3(\xi,\zeta) - e_3(\xi_0,\zeta) - 2((x_1 - z_1)(x_2^0 - z_2) - (x_2 - z_2)(x_1^0 - z_1))\Big|,$$

per ogni $\zeta \in S$. Qui abbiamo indicato con $\zeta = (z_1, z_2, z_3, \tau)$, $\xi = (x_1, x_2, x_3, t)$, $\xi_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, t_0)$ e con

$$|\xi - \xi_0| = \eta(\xi - \xi_0),$$

con η come in (16).

Osservazione 2.2 *Poiché $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega)$ allora per l'Osservazione 2.1 $a, b \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Omega)$ e otteniamo*

$$|e_3(\xi,\zeta) - e_3(\xi_0,\zeta) - 2((x_1 - z_1)(x_2^0 - x_2) - (x_2 - z_2)(x_1^0 - x_1))|$$

$$\le c(d_\xi(\xi,\xi_0)d_\xi(\xi,\zeta) + d_\xi^\alpha(\xi,\xi_0)d_\xi^2(\xi,\zeta) + d_\xi(\xi,\xi_0)d_\xi^2(\xi,\zeta) + d_\xi^2(\xi,\xi_0)),$$

$$|e_4(\xi,\zeta) - e_4(\xi_0,\zeta)| \le c(|\xi-\xi_0||t-\tau| + |t-t_0|) \le c(d_\xi(\xi,\xi_0)d_\xi^2(\xi,\zeta) + d_\xi^2(\xi,\xi_0)).$$

Siamo ora pronti per scrivere una formula di rappresentazione per $v \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}$ in termini di Hv. Questa formula di rappresentazione è lo strumento principale nella prova della Proposizione 1.1. Poiché siamo interessati ad un risultato locale, fissiamo due insiemi aperti Ω_1, Ω_2 tali che $\overline{\Omega}_2 \subset\subset \Omega_1, \overline{\Omega}_1 \subset\subset \Omega$ ed una funzione $\phi \in C_0^\infty(\Omega_1)$ tale che $\phi \equiv 1$ in Ω_2.

Proposizione 2.2 *Se $v \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega)$ allora per ogni $\xi \in \Omega_2$*

$$v(\xi) = v_1(\xi,\xi_0) + 4v_2(\xi,\xi_0),$$

dove

$$v_1(\xi,\xi_0) = \int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)Hv(\zeta)\phi(\zeta)d\zeta + \int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)(L_{\xi_0} - L)v(\zeta)\phi(\zeta)d\zeta$$

$$+ \int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)v(\zeta)L_{\xi_0}\phi(\zeta)d\zeta + 2\sum_{i=1}^{2}\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)X_{i,\xi_0}v(\zeta)X_{i,\xi_0}\phi(\zeta)d\zeta,$$

$$v_2(\xi,\xi_0) = \int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)((1+a^2+b^2)(\zeta) - (1+a^2+b^2)(\xi_0))(\partial_t v(\zeta) - \partial_t v(\xi_0))\phi(\zeta)d\zeta$$

$$+\partial_t v(\xi_0)\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)((1+a^2+b^2)(\zeta)-P_{\xi_0}(1+a^2+b^2)(\zeta))\phi(\zeta)d\zeta$$

$$+\partial_t v(\xi_0)\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)P_{\xi_0}(1+a^2+b^2)(\zeta)\phi(\zeta)d\zeta-\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)v(\zeta)T_{\xi_0}\phi(\zeta)d\zeta.$$

Si veda [C] oppure [CM] per l'espressione esplicita di $L_{\xi_0}-L$.

3 Stime hölderiane

In questa sezione deriviamo la formula di rappresentazione enunciata nella Proposizione 2.2 e dimostiamo alcuni risultati di regolarità per le soluzioni dell'equazione lineare $Hv=f$, con H definito in (14), in opportuni spazi di funzioni hölderiane associati alla geometria naturale del problema.

Per ogni $\xi=(x_1,x_2,x_3,t)$ e $\zeta=(z_1,z_2,z_3,\tau)$ definiamo una pseudo-distanza d come segue:

$$d(\xi,\zeta)=\frac{d_\xi(\xi,\zeta)+d_\zeta(\xi,\zeta)}{2} \tag{19}$$

con d_ξ definita come in (18).

Corollario 3.1 *Per ogni insieme compatto* $K\subset\subset\Omega$ *esistono* $c_1,c_2>0$ *tali che*

$$c_1 d_\xi(\xi,\zeta)\le d(\xi,\zeta)\le c_2 d_\xi(\xi,\zeta)$$

per ogni $\xi,\zeta\in K$.

Definiamo ora una classe di funzioni hölderiane in termini di d.

Definizione 3.1 *Per ogni* $\alpha\in(0,1)$

$$C^\alpha_H(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathbb{R}\quad \text{tale che}\quad \frac{|f(\xi)-f(\zeta)|}{d^\alpha(\xi,\zeta)}\quad \textit{è limitato per ogni}\,\xi,\zeta\in\Omega\}.$$

Diciamo che $f\in C^\alpha_{H,loc}(\Omega)$ *se per ogni insieme compatto* $K\subset\subset\Omega$ *esiste una costante positiva* c *tale che*

$$\frac{|f(\xi)-f(\zeta)|}{d^\alpha(\xi,\zeta)}\le c,$$

per ogni $\xi,\zeta\in K$.

Siano X_1,X_2,X_3,T i campi vettoriali definiti in (6) e (13).

Definizione 3.2 *Diciamo che* $f\in C^{1,\alpha}_H(\Omega)$ *se* $f\in C^\alpha_H(\Omega)$, $X_i f\in C^\alpha_H(\Omega)$ *per ogni* $i=1,2,$ *e*

$$\frac{|f(x,t)-f(x,\tau)|}{|t-\tau|^{\frac{1+\alpha}{2}}}$$

è limitato per ogni $(x,t),(x,\tau)\in\Omega$.

Osservazione 3.1 *Se $f \in C^{1,\alpha}_{H,loc}(\Omega)$ allora peer ogni insieme compatto $K \subset\subset \Omega$ esiste una costante positiva c tale che*

$$|f(\zeta) - P_\xi f(\zeta)| \leq c d^{1+\alpha}(\xi, \zeta),$$

per ogni $\xi, \zeta \in K$.

Definizione 3.3

$$C^{2,\alpha}_H(\Omega) = \{f \in C^{1,\alpha}_H(\Omega) : \quad X_i f \in C^{1,\alpha}_H(\Omega),\ i = 1,2, \quad Tf \in C^\alpha_H(\Omega)\}.$$

Se $m \geq 3$ e i coefficienti a, b di H sono di classe $C^{m-1,\alpha}_H(\Omega)$ definiamo

$$C^{m,\alpha}_H(\Omega) = \{f \in C^{m-1,\alpha}_H(\Omega) : \quad X_i f \in C^{m-1,\alpha}_H(\Omega),\ i = 1,2, \quad Tf \in C^{m-2,\alpha}_H(\Omega)\}.$$

Osservazione 3.2 *Osserviamo esplicitamente che*

$$C^{2m,2\alpha}_H(\Omega) \subset C^{m+\alpha, \frac{m+\alpha}{2}}(\Omega) \subset C^{m,\alpha}_H(\Omega).$$

In seguito utilizzeremo anche la seguente notazione: chiameremo

$$X_4 = T,$$

e per ogni multi-indice $I = (i_1, \ldots, i_m)$, $i_k \in \{1, 2, 3, 4\}$ scriveremo

$$X^I = X_{i_1} \cdots X_{i_m}.$$

Nel seguente lemma deriviamo la formula di rappresentazione enunciata nella Proposizione 2.2.

Lemma 3.1 *Sia $v \in C^{2,\alpha}_H(\Omega)$ una soluzione dell'equazione*

$$Hv = f \in C^{1,\alpha}_H(\Omega),$$

allora per ogni multi-indice I, tale che $|I| = 2$, e per ogni $i = 1, 2$ l'applicazione

$$\xi_0 \to X_i X^I_{\xi_0} v(\xi_0)$$

è di classe $C^\beta_{H,loc}(\Omega)$ per ogni $\beta < \alpha$.

Proposizione 3.1 *Se $a, b \in C^{2,\alpha}_{H,loc}(\Omega)$ e $v \in C^{2,\alpha}_H(\Omega)$ è una soluzione dell'equazione*

$$Hv = f \in C^{1,\alpha}_H(\Omega),$$

allora $v \in C^{3,\beta}_{H,loc}(\Omega)$, per ogni $\beta < \alpha$.

Per dimostrare la Proposizione 1.1 useremo anche la seguente versione *debole* della Proposizione 3.1.

Proposizione 3.2 *Siano* $a, b \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Omega)$, $f \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Omega)$, $\partial_t f \in C_H^{\alpha}(\Omega)$. *Se* $v \in C_H^{2,\alpha}(\Omega)$ *è una soluzione* $Hv = f$ *e* $\partial_t v \in C_H^{1,\alpha}(\Omega)$, *allora* $\partial_t v, \partial_{x_3} v \in C_{H,loc}^{2,\beta}(\Omega)$, *per ogni* $\beta < \alpha$.

Ora applicheremo la Proposizione 3.1 e la Proposizione 3.2 alle derivate di una soluzione v dell'equazione lineare

$$Hv = f, \tag{20}$$

e dimostreremo la Proposizione 1.1.

Lemma 3.2 *Se* v *è una soluzione di (20) allora formalmente le funzioni* $\omega_1 = X_1 v$, $\omega_2 = X_2 v$, $\omega_3 = \partial_{x_3} v$, $\omega_4 = \partial_t v$ *sono rispettivamente soluzioni delle seguenti equazioni*

$$H\omega_1 = X_1 f + 2q(X_2\partial_{x_3} v - X_1\partial_{x_3} u \partial_{x_3} v) + (X_2 q - \partial_{x_3} u X_1 q)\partial_{x_3} v \tag{21}$$
$$+4X_1(1 + a^2 + b^2)\partial_t v - 4\partial_t a(1 + a^2 + b^2)\partial_{x_3} v,$$

dove

$$q = 4\frac{1 + a^2 + b^2}{1 + u_{x_3}^2}\partial_t u,$$

$$H\omega_2 = X_2 f - 2q(X_1\partial_{x_3} v + X_2\partial_{x_3} u\partial_{x_3} v) - (X_1 q + \partial_{x_3} u X_2 q)\partial_{x_3} v \tag{22}$$
$$+4X_2(1 + a^2 + b^2)\partial_t v - 4\partial_t b(1 + a^2 + b^2)\partial_{x_3} v.$$

$$H\omega_3 = \partial_{x_3} f - 2(\partial_{x_3} a X_1 \partial_{x_3} v + \partial_{x_3} b X_2 \partial_{x_3} v) + 4\partial_{x_3}(1 + a^2 + b^2)\partial_t v, \tag{23}$$

$$H\omega_4 = \partial_t f - 2(\partial_t a X_1 \partial_{x_3} v + \partial_t b X_2 \partial_{x_3} v) + 4\partial_t(1 + a^2 + b^2)\partial_t v. \tag{24}$$

Prova della Proposizione 1.1 Poiché $a, b \in C_{H,loc}^{2,\alpha}(\Omega)$ e $v \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega)$, in particolare $v \in C_H^{2,\alpha}(\Omega)$ e per la Proposizione 3.1 $v \in C_{H,loc}^{3,\beta}(\Omega)$. Ora dimostriamo l'affermazione per $m = 3$. Per la Proposizione 3.2 $\partial_t v, \partial_{x_3} v \in C_{H,loc}^{2,\beta}(\Omega)$. Per il Lemma 3.2 le funzioni $\omega = X_1 v, X_2 v$ soddisfano $H\omega \in C_{H,loc}^{1,\beta}(\Omega)$, quindi per la Proposizione 3.1 $X_1 v, X_2 v \in C_{H,loc}^{3,\beta}(\Omega)$, e $v \in C_{H,loc}^{4,\beta}(\Omega)$. Ora concludiamo la prova per induzione. Assumiamo vera la tesi per $m-1, m-2$ e dimostreremo che se $a, b \in C_{H,loc}^{m,\beta}(\Omega)$, $f \in C_{H,loc}^{m-1,\beta}(\Omega)$ per ogni $\beta < \alpha$, allora $v \in C_{H,loc}^{m+1,\beta}(\Omega)$. Per il Lemma 3.2 $\partial_{x_3} v, \partial_t v \in C_{H,loc}^{m-2,\beta}(\Omega)$ soddisfano $H\omega \in C_{H,loc}^{m-3,\beta}(\Omega)$, allora per l'ipotesi induttiva $\partial_{x_3} v, \partial_t v \in C_{H,loc}^{m-1,\beta}(\Omega)$. Per il Lemma 3.2 $X_1 v, X_2 v \in C_{H,loc}^{m-1,\beta}(\Omega)$ soddisfa $H\omega \in C_{H,loc}^{m-2,\beta}(\Omega)$, allora per l'ipotesi induttiva $X_1 v, X_2 v \in C_{H,loc}^{m,\beta}(\Omega)$. In particolare $v \in C_{H,loc}^{m+1,\beta}(\Omega)$, per ogni $\beta < \alpha$.

4 Regolarità C^∞

In questa sezione applicheremo la Proposizione 3.1 e la Proposizione 1.1 ad una soluzione u di (5) e dimostreremo il nostro principale risultato Teorema 1.1. Come abbiamo già osservato nell'introduzione l'equazione parabolica in (5) può essere scritta come in (7), quindi se $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega)$ è una soluzione di (5) allora $Hu = 0$, con H l'operatore parabolico del secondo ordine definito in (14) e con coefficienti $a = a(\nabla u), b = b(\nabla u) \in C^{1+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega)$. In particolare $a = X_2 u, b = -X_1 u \in C^{1,\alpha}_{H,loc}(\Omega)$. In seguito denoteremo sempre con β un numero reale tale che $0 < \beta < \alpha$.

Prima di applicare la Proposizione 3.1 alla nostra soluzione u, utilizziamo la non linearità dell'equazione, il Lemma 3.1 e la Proposizione 3.2 per regolarizzare i coefficienti a, b.

Proposizione 4.1 *Se $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega)$ è una soluzione di (5) allora $a, b \in C^{2,\beta}_{H,loc}(\Omega)$ per ogni $\beta < \alpha$.*

Dimostrazione Per ogni $i, j = 1, 2$

$$X_i X_j a(\xi_0) = \frac{X_i X_{j,\xi_0} X_{2,\xi_0} u(\xi_0) - \partial_{x_3} u(\xi_0) X_i X_{j,\xi_0} X_{1,\xi_0}(\xi_0)}{1 + (\partial_{x_3} u(\xi_0))^2}, \tag{25}$$

$$X_i X_j b(\xi_0) = \frac{-X_i X_{j,\xi_0} X_{1,\xi_0} u(\xi_0) - \partial_{x_3} u(\xi_0) X_i X_{j,\xi_0} X_{2,\xi_0}(\xi_0)}{1 + (\partial_{x_3} u(\xi_0))^2}. \tag{26}$$

Possiamo ora applicare il Lemma 3.1 al secondo membro in (25) e (26) per dedurre che l'applicazione

$$\xi_0 \to X_i X_j a(\xi_0), \quad \xi_0 \to X_i X_j b(\xi_0)$$

sono di classe $C^{\beta}_{H,loc}(\Omega)$.

Per la Proposizione 3.1 otteniamo che per ogni $i = 1, 2$ le funzioni $\partial_t X_i a$, $\partial_t X_i b \in C^{\beta}_{H,loc}(\Omega)$. Da questo segue che per ogni insieme compatto $K \subset\subset \Omega$ esiste una costante positiva c tale che

$$|X_i a(x,t) - X_i a(x,t_0)| \leq c|t - t_0|^{\frac{1+\beta}{2}}, \quad |X_i b(x,t) - X_i b(x,t_0)| \leq c|t - t_0|^{\frac{1+\beta}{2}}$$

per ogni $(x,t), (x,t_0) \in K$, e possiamo quindi concludere che $a, b \in C^{2,\beta}_{H,loc}(\Omega)$.

Prova del Teorema 1.1 Poiché $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega)$ è una soluzione di $Hu = 0$, se $a, b \in C^{m,\beta}_{H,loc}$, per ogni $m \in \mathbb{N}$, allora per la Proposizione 1.1 $u \in C^\infty(\Omega)$. Quindi dobbiamo solo dimostrare che $a, b \in C^{m,\beta}_{H,loc}$, per ogni $m \in \mathbb{N}$. Per la Proposizione 4.1 $a, b \in C^{2,\beta}_{H,loc}(\Omega)$. Ora concludiamo la prova per induzione. Assumiamo che $a, b \in C^{m,\beta}_{H,loc}(\Omega)$ e dimostriamo che allora $a, b \in C^{m+1,\beta}_{H,loc}(\Omega)$. Infatti se $a, b \in C^{m,\beta}_{H,loc}(\Omega)$ allora, per la Proposizione 1.1, $u \in C^{m,\beta}_{H,loc}(\Omega)$ e per il Lemma 3.2 le funzioni $\omega = \partial_{x_3} u, \partial_t u$ soddisfano $H\omega \in C^{m-2,\beta}_{H,loc}(\Omega)$ in quanto il secondo membro è nullo. Quindi, per la Proposizione 1.1, $\omega = \partial_{x_3} u, \partial_t u \in C^{m,\beta}_{H,loc}(\Omega)$. Per il Lemma 3.2 le funzioni $\omega = X_1 u, X_2 u$ soddisfano $H\omega \in C^{m-1,\beta}_{H,loc}(\Omega)$. Quindi, per la Proposizione 1.1, $a = X_2 u, b = -X_1 u \in C^{m+1,\beta}_{H,loc}(\Omega)$.

Bibliografia

[C] G. Citti, C^∞ *regularity of solutions of a quasilinear equation related to the Levi operator* Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa Cl. Sci., Serie 4 Vol. XXIII (1996), 483-529.

[CM] G. Citti, A. Montanari, C^∞ *regularity of solutions of an equation of Levi's type in* $\mathbb{R}^{2n+1}$, to appear on Ann. Mat. Pura Appl.

[CPP] G. Citti, A. Pascucci, S. Polidoro, *On the regularity of solutions to a non-linear ultraparabolic equation arising in mathematical finance*, preprint.

[H] G. Huisken, *Contracting convex hypersurfaces in Riemannian manifolds by their mean curvature*, Invent. Math. **84** (1986) 463-480.

[HK] G. Huisken, W. Klingenberg, *Flow of real hypersurfaces by the trace of the Levi form*, preprint.

[M] A. Montanari, *A smooth regularity result for real hypersurfaces evolving by Levi curvature*, preprint.

[NSW] A. Nagel, E. M. Stein, S. Wainger, *Balls and metrics defined by vector fields I: basic properties*, Acta Math. **155** (1985) 103-147.

[RS] L. P. Rothshild, E. M. Stein, *Hypoelliptic differential operators on nilpotent groups* Acta Math., **137** (1977), 247-320.

[SC] A. Sánchez-Calle, *Fundamental solutions and geometry of the sum of squares of vector fields*, Invent. Math., **78** (1984), 143-160.

[ST1] Z. Slodkowski, G. Tomassini, *Evolution of subsets of* $\mathbb{C}^2$ *and Parabolic Problem for the Levi Equation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. (4) Vol. XXV (1997), 757-784.

[ST2] Z. Slodkowski, G. Tomassini, *Evolution of special subsets of* $\mathbb{C}^2$, preprint n. 21 della Scuola Normale Superiore di Pisa (1998).

[ST3] Z. Slodkowski, G. Tomassini, *Evolution of a graph by Levi form*, preprint.